

Γεωμετρία

9/4/2019

Στοιχεία

$$H = \text{σφαίρα} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

όπου $a, b, \gamma, R \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R} > 0$

παριστάει σφαίρα με κέντρο το σημείο

$K(a, b, \gamma)$ με ακτίνα R .

Πρόταση

$$H: x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + \Delta = 0$$

$$H \quad \text{όπου} \quad A^2 + B^2 + C^2 - 4\Delta > 0$$

H τμήν σφαίρας και ελλειψοειδούς

παριστάει σφαίρα ή κύκλο

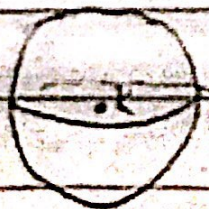
Πρόταση 1 Έστω σφαίρα με εξίσωση

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

Τότε, το εφωπτόμενο ελλειψοειδές της (S)

στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ έχει εξίσωση

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2$$



Παρατήρηση

Σύμφωνα την εξίσωση $E(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz + \Delta = 0$

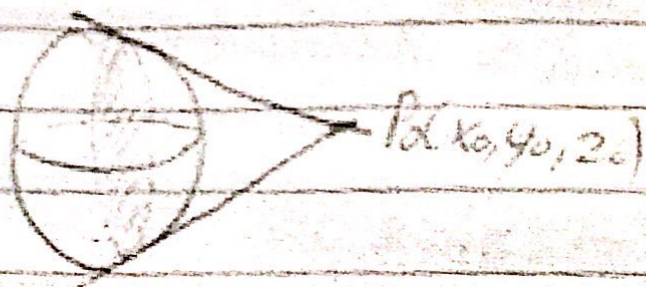
την ονομάζουμε γενικευμένη σφαίρα.

Προβλημα (1) Δίνεται η σφαίρα

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

και ένα επίπεδο $P(x_0, y_0, z_0)$

Εύρετε
αυτά:



Από το επίπεδο P παράγουμε να
βρούμε ποια επίπεδα που
εφαπτόνται το P (βλέπετε)

Να βρούμε ο γεωμετρικός τόπος
είναι των επιπέδων επαφής

Ισχυρισμός: Τα επίπεδα επαφής
επιμορφώνουν κύκλο

Απόδειξη ισχυρισμού:

Ας υποθέσουμε ότι $P_1(x_1, y_1, z_1)$

είναι το σημείο επαφής ενός τριαντ

επιπέδου Π από το $P(x_0, y_0, z_0)$

Η ελάχιστη απόσταση του επιπέδου θα

είναι

$$(1) (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-\gamma)(z_1-\gamma) = R^2$$

Όπως το P_0 - διαρρέει από το Ω
 από επιφάνεια των σημείων του (Γ)
 $\Rightarrow$

$$x(x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) + (z_0 - \gamma)(z_1 - \gamma) = R^2$$

Άρα το κυκλικό σχήμα είναι

$P(x_0, y_0, z_0)$ πληρεί την επιφάνεια (π)

$\rightarrow$ παρίσταται επιπεδο

Άρα τα σημεία του π είναι και στην
 επιφάνεια της σφαίρας (Σ) με το κέντρο (κ)
 Άρα π τομή είναι ο κύκλος

$$(K) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = R^2 \end{cases}$$

Αν το P_0 ήταν πάνω στην σφαίρα,
 τότε θα ήταν σημείο

Ο κύκλος (K) λέγεται πολικός κύκλος

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε δύο σφαίρες

$$(S_1) \quad S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$

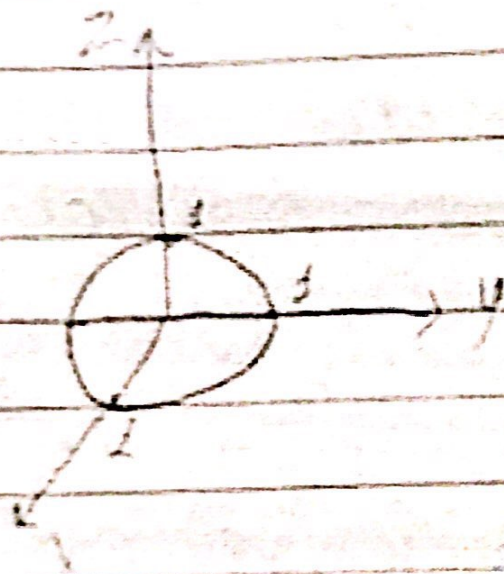
$$(S_2) \quad S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι οι σφαίρες (S_1) και

(S_2) τέμνεται και Σ είναι η κοινή τομή



Το εμβαδόν είναι
 ποσότητες είναι οι
 γραμμές που περιέχουν
 το κύκλο $\kappa = S_1 \cap S_2$;



Τα περιέχουν
 ανήκει
 γραμμές

Απάντηση: Η εξίσωση

$$\lambda S_1(x, y, z) + \mu S_2(x, y, z) = 0$$

που ισοδυναμεί με το

$$(\lambda \mu) (x^2 + y^2 + z^2) + (\lambda \alpha \mu + \mu \alpha \beta) x$$

$$+ (\lambda \beta \mu + \mu \beta \gamma) y$$

$$+ (\lambda \gamma \mu + \mu \gamma \alpha) z$$

$$+ \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 = 0$$

Παράγοντες βγαίνει τον περιέχει

τον κύκλο $\kappa = S_1 \cap S_2$

Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Ένα σύστημα συντεταγμένων

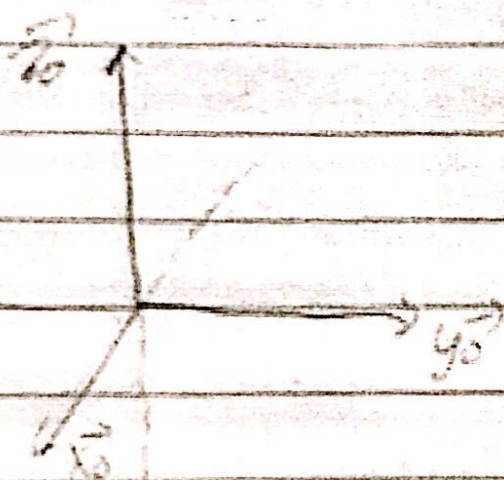
$\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ θα λέγεται ορθόγωνο

όταν τα διανύσματα $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$

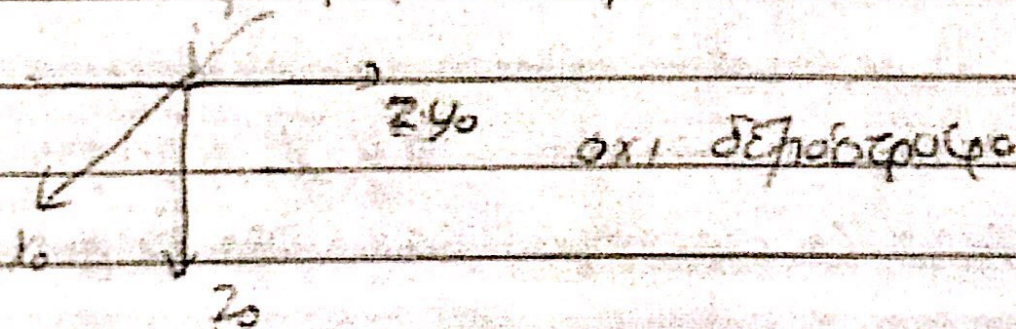
είναι κάθετα μεταξύ τους. Είναι

τότε συνήθως θα λέγεται δεξιόστροφο

όταν $\langle \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \rangle > 0$



Δεξιόστροφο σύστημα



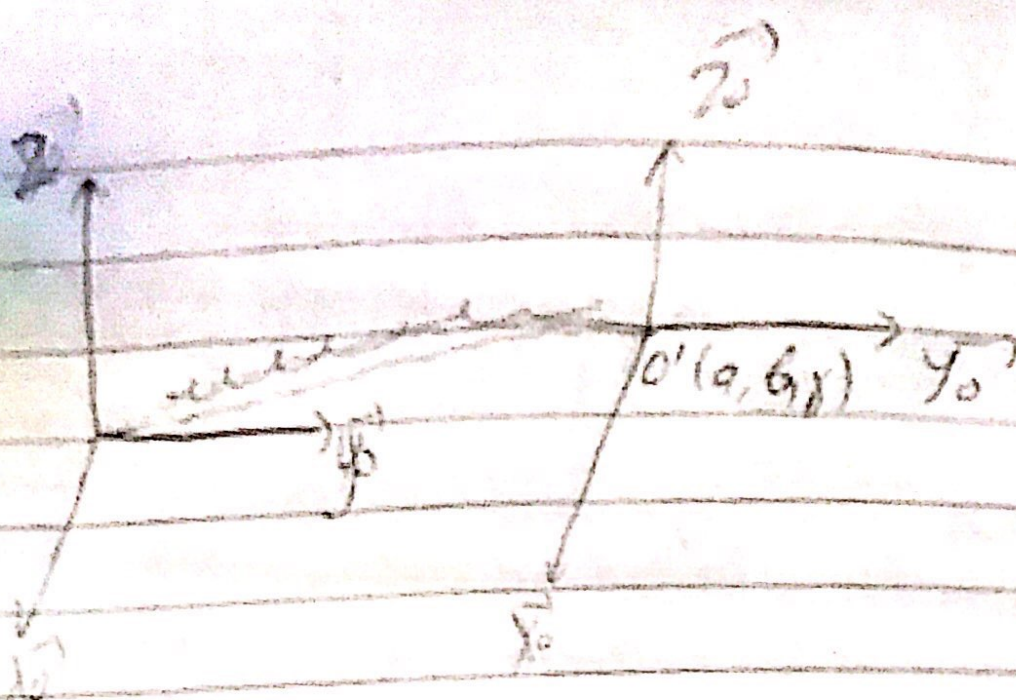
Από εδώ και στο εξής θα μελετάσουμε
μόνο δεξιόστροφα ορθόγωνα συστήματα

(1) παραλληλ. ή μεταφορά

Θεωρούμε δύο συστήματα συντεταγμένων

$\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\}$

με $\vec{x}' = \vec{x}_0, \vec{y}' = \vec{y}_0, \vec{z}' = \vec{z}_0$



Έχουμε λοιπόν διαφορετικές αρχές
αλλά παραλλήλους άξονες.
Αν τέτοια συστήματα θα λέγονται
παραλλήλα

Επίσης θα βλέπεται οι
δυο συστήματα τα πρώτα συστήματα
με το δεύτερο;

Εάν σημείο P με συντεταγμένες
 (x, y, z) ως προς το πρώτο
σύστημα και με (x', y', z') ως
προς το δεύτερο. Εάν (a, b, γ) οι
συντεταγμένες του O' ως προς το
πρώτο σύστημα, τότε

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

Με αντικατάσταση λαμβάνουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a\vec{i} + b\vec{j} + \gamma\vec{k} + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} =$$

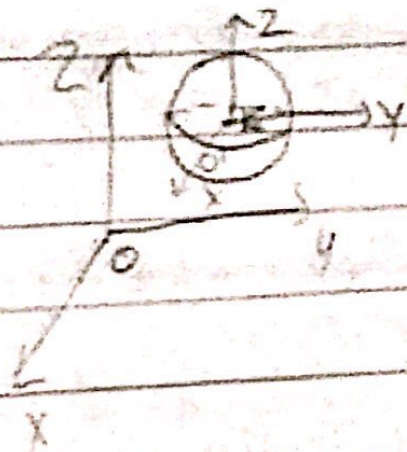
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda x + \mu y + \nu z =$$

$$(a+\lambda)x^2 + (b+\mu)y^2 + (c+\nu)z^2$$

$$\begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \mu \\ z = c + \nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x - a \\ \mu = y - b \\ \nu = z - c \end{cases}$$

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την σφαίρα $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 1$

• ω) πρὸς το καρτεσιανὸ σύστημα συντεταγμένων $\{O(0,0,0), \vec{x}=(1,0,0), \vec{y}=(0,1,0), \vec{z}=(0,0,1)\}$

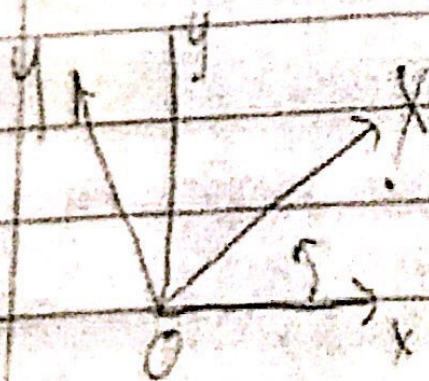


• ω) πρὸς τὸ
 σύστημα
 $\{O'(1,0,1), \vec{x}'=(1,0,0), \vec{y}'=(0,1,0), \vec{z}'=(0,0,1)\}$

η τῆσός της θα εἶναι:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Σημείωση. ὅταν δύο συντεταγμένες ἔχουν κοινὴ ἀρχή, θα λέμε ὅτι τὸ ἕνα εἶναι ὑποκοινὸ τοῦ ἄλλου



Ας δοῦμε πῶς συνδέονται οἱ συντεταγμένους δύο τέτοιων συστημάτων

Ας θεωρήσουμε πάλι τὸν σφαιρικὸν

τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ με
 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, τότε μπορούμε
 να βρούμε εύκολα οι συντεταγμένες
 παρατηρούμε

και παίρνουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} &= \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 \\ \vec{y} &= \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \beta_3 \vec{x}_3 \\ \vec{z} &= \gamma_1 \vec{x}_1 + \gamma_2 \vec{x}_2 + \gamma_3 \vec{x}_3 \end{aligned} \right\} (*)$$

$\alpha_i = \langle \vec{x}_i, \vec{x} \rangle = \cos(\mu_i)$ (γωνία των $\vec{x}_i, \vec{x}$)

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι

$$\alpha_1 = \langle \vec{x}_1, \vec{x} \rangle = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \|\vec{x}\| \cos \mu_1$$

$$\alpha_2 = \langle \vec{x}_2, \vec{x} \rangle = \frac{1}{\|\vec{x}_2\|} \|\vec{x}\| \cos \mu_2$$

$$\alpha_3 = \langle \vec{x}_3, \vec{x} \rangle = \frac{1}{\|\vec{x}_3\|} \|\vec{x}\| \cos \mu_3$$

ήτοι για τους συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

και $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Παρατήρηση

Επειδή τα διανύσματα είναι ορθογώνια

προκύπτει ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$

είναι ορθογώνιος.

$$A^T A = I$$

3ο βραχυ τύπο που επιδέχεται οι
 μετασχηματισμοί των σημείων P ως προς τα
 δύο συστήματα

Υποθέτουμε ότι ως προς το πρώτο σύστημα
 α) επιτεταγμένους είναι (x, y, z) και
 β) ως προς το δεύτερο $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Οπότε

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{OP} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3$$

$$\text{Άρα, } x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \stackrel{(*)}{=} \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3$$

$$x(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + y(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) + z(\tilde{x}_1\vec{e}_1 + \tilde{x}_2\vec{e}_2 + \tilde{x}_3\vec{e}_3) =$$

$$\tilde{x}(a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + \tilde{x}_3\vec{e}_3) = \tilde{x}$$

$$\tilde{y}(a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \tilde{y}_3\vec{e}_3) = \tilde{y}$$

$$\tilde{z}(a_3\vec{e}_1 + b_3\vec{e}_2 + \tilde{z}_3\vec{e}_3) = \tilde{z}$$

$$\text{Η } A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \tilde{x}_1 \\ a_2 & b_2 & \tilde{x}_2 \\ a_3 & b_3 & \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad \det A^t = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \tilde{x}_1 \\ a_2 & b_2 & \tilde{x}_2 \\ a_3 & b_3 & \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & j_1 \\ a_2 & b_2 & j_2 \\ a_3 & b_3 & j_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z = j_1 x + j_2 y + j_3 z \end{cases}$$